Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ — 14/11/2016

12ο Μάθημα

Παρατήρηση: Έστω ότι $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\bar{x} = (x_1, .., x_n) \in U$ (σταθερό) και ότι ο περιορισμός μιας $f: U \to \mathbb{R}$ $\tilde{F}: U \cap \underbrace{\{(y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i = x_i\}}_{=E_i} \to \mathbb{R}$

με $\tilde{F}|_{U \cap E_i}(\bar{y}) = F(\bar{y})$, $i = 1, .., n$ δεν είναι συνεχής στο σημείο x_i, τότε η F δεν είναι συνεχής στο σημείο $(x_1, .., x_n)$?

"Διαφόριση"

1. Μερική διαφόριση
2. (ολική) διαφορισιμότητα

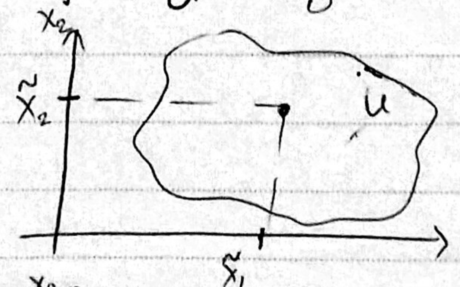
1. ⇝ Ορισμός

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Η f δέχεται μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο $\bar{x} = (x_1, .., x_n) \in U$ ως προς την i-οστή μεταβλητή $i = 1, .., n$ αν υπάρχει στον $\mathbb{R}$ το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}) - f(\bar{x})}{h} := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

και το όριο αυτό ονομάζεται μερική παράγωγος στο σημείο $\bar{x}$ ως προς την i-οστή όπου $e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-οστή θέση}}}{1}, 0, \dots, 0)$

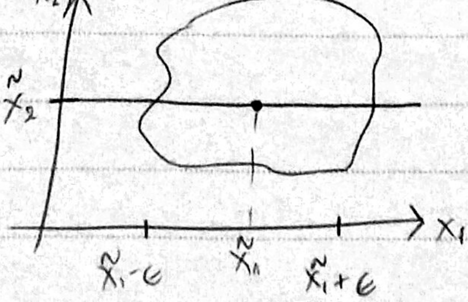
Παράδειγμα (για $n=2$)



$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \lim_{h \to 0} \frac{F(\tilde{x}_1 + h, \tilde{x}_2) - F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{h}$$

δηλαδή:

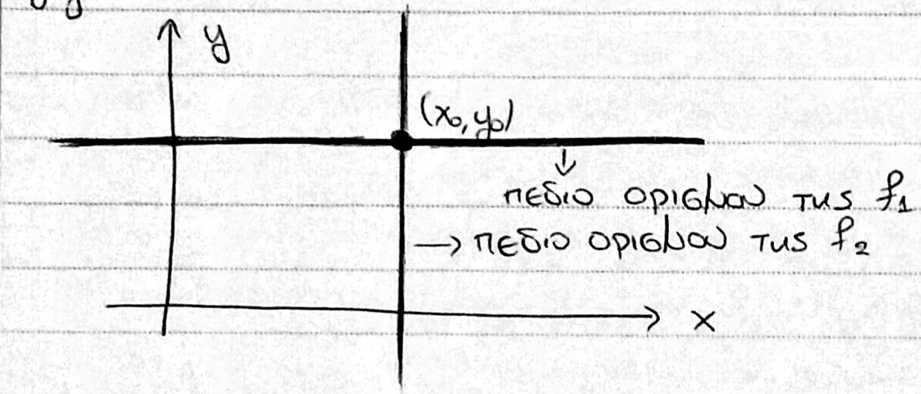
$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ είναι απο την παράγωγο της συνάρτησης $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}$ με $\tilde{x} \in (\tilde{x}_1 - \epsilon, \tilde{x}_1 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$



Πιο ολοκληρωμένα: Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ως προς το x αν:
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ και μερικώς διαφορίσιμη ως προς y αν $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in$

Δηλαδή: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$ αν θέσουμε $f_1(x) := f(x, y_0)$ και

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$ αν θέσουμε $f_2(y) := f(x_0, y)$



Ασκήσεις- Παραδείγματα:

Βρείτε για τις επόμενες συναρτήσεις όλες τις μερικές παραγώγους, δηλαδή προς όλες τις μεταβλητές σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία υπάρχουν.

1. $f(x,y) = e^{\|(x,y)\|^2} = e^{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y e^{x^2+y^2}$

2. $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \|\bar{x}\|, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2}} =$

$= \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$

Υπενθύμιση: $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+c} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+c}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ αν $c>0$

⤳ Μήπως υπάρχει και η μερική παράγωγος της $f(\bar{x})=||\bar{x}||$ στο $\bar{x}=0$.

(3.) $F(x,y,z) = ||(x,y,z)||^2$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ και:

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z$

(4.) Έστω $h=(0,\infty)\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη (παραγωγίσιμη) $\Rightarrow$ Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}\to\mathbb{R}$, $F(x)=h(||\bar{x}||)$ είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$ ως προς κάθε μεταβλητή. Πράγματι, αν $\bar{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$

$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = F_i(x_i)$ όπου $F_i(x)=h\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2+x^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2} = g(x)$

$\frac{d}{dx}h(g(x))$.